ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2024

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΔΕΥΤΕΡΑ, 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

8:00π.μ. – 11:00 π.μ.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ.
Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο το οποίο αποτελείται από δύο (2) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο $K(1,1)$, αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο $\Sigma(1,6)$ προς τον κύκλο είναι ίσο με 4 μονάδες.

Α2. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx$$

Α3. Να χαρακτηρίσετε τον πιο κάτω ισχυρισμό ως **ΟΡΘΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

«Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα $\Delta \subset \mathbb{R}$, τότε ισχύει ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ»

Α4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει ότι το σημείο $A(0,1)$ ανήκει στη γραφική της παράσταση. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, αν η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης έχει κλίση:

$$\lambda(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

A5. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \tau o\xi\eta\mu t\, dt}{\sigma\upsilon\nu x - 1}$$

A6. Θεωρούμε το χωρίο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από τη γραφική παράσταση της παραβολής

$$f(x) = (x+2)^2,$$

την ευθεία $y = 9$ και τον άξονα των τεταγμένων. Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν του πιο πάνω χωρίου

(μονάδες 2)

(β) τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του πιο πάνω χωρίου γύρω από τον άξονα των τεταγμένων.

(μονάδες 3)

A7. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει:

$$f''(x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$\int f(x)\eta\mu x\, dx = \frac{f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x}{2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

(μονάδες 3)

(β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^{-x}\eta\mu x\, dx$$

(μονάδες 2)

A8. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x^2 dx$$

A9. Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β).

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g: [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$, με τύπο:

$$g(x) = f(x) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - a)$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

(μονάδες 3)

(β) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

(μονάδες 2)

A10. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = \eta\mu x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{και} \quad g(x) = x - \eta\mu x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τα ακρότατα.

(μονάδες 1,5)

(β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

(μονάδες 1)

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(0, f(0))$ και $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. **(μονάδες 1)**

(δ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι: **(μονάδες 1,5)**

$$\frac{2x}{\pi} \leq \eta\mu x \leq x, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=\alpha^2$ και P τυχαίο σημείο του. Από το σημείο P φέρουμε ευθεία παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων, η οποία τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο N. Έστω Σ σημείο πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα PN τέτοιο ώστε:

$$\frac{\Sigma N}{PN}=\frac{\beta}{\alpha} \text{ όπου } 0<\beta<\alpha,\ \alpha,\beta\epsilon\mathbb{R}$$

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Σ καθώς το P κινείται πάνω στον κύκλο είναι η

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

(μονάδες 5)

(β) Δίνεται το σύστημα των ανισώσεων:

$$\begin{cases} x^2+y^2\leq\alpha^2 \\ \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}\geq 1,\ \ 0<\beta<\alpha \end{cases}$$

Το χωρίο που περιγράφεται από το πιο πάνω σύστημα περιστρέφεται κατά π ακτίνια γύρω από των άξονα των τετμημένων. Να αποδείξετε ότι ο όγκος του παραγόμενου στερεού είναι ίσος με

$$V=\frac{4}{3}\pi\alpha(\alpha^2-\beta^2)\ \kappa.\mu.$$

(μονάδες 5)

Β2. Σε ένα Λύκειο επτά (7) τελειόφοιτοι μαθητές/τριες ενοικίασαν τέσσερα (4) διθέσια μηχανάκια.

(α) Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν στα μηχανάκια οι επτά τελειόφοιτοι, αν:

i. σε κάθε θέση οδηγού πρέπει απαραίτητα να υπάρχει μαθητής/τρια
ii. η Αργυρώ και ο Δημήτρης ξέχασαν να φέρουν το δίπλωμα οδήγησής τους, άρα δεν μπορούν να καθίσουν σε θέση οδηγού.

(μονάδες 6)

(β) Δεδομένου ότι η Αργυρώ και ο Δημήτρης δεν μπορούν να καθίσουν σε θέση οδηγού, να βρείτε την πιθανότητα η Γεωργία και ο Μάριος να καθίσουν στο ίδιο μηχανάκι. **(μονάδες 4)**

B3. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4\alpha x,\ \alpha > 0$. Παίρνουμε σημεία Γ και Δ πάνω στη διευθετούσα της, με $y_\Gamma > 0$, έτσι ώστε η γωνία $\Gamma E \Delta$ να είναι ορθή, όπου E η εστία της παραβολής. Από τα Γ και Δ φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τον άξονα της παραβολής, οι οποίες τέμνουν την παραβολή στα σημεία $A(\alpha t^2, 2\alpha t)$ και $B(\alpha\rho^2, 2\alpha\rho)$, αντίστοιχα.

(α) Να αποδείξετε ότι η AB είναι εστιακή χορδή. **(μονάδες 4)**

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A έτσι ώστε το τραπέζιο $AB\Delta\Gamma$ να έχει ελάχιστο εμβαδόν. (Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι $E = \frac{(\beta_1+\beta_2)\upsilon}{2}$)

(μονάδες 6)

B4. Το 15% του ανθρώπινου πληθυσμού έχει ψηλό δείκτη νοημοσύνης (I.Q.).

(α) Επιλέγουμε στην τύχη 10 άτομα από αυτόν τον πληθυσμό. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των πιο κάτω ενδεχομένων:

Α: «Ανάμεσα στα 10 άτομα υπάρχουν ακριβώς 4 με ψηλό I.Q.»
Β: «Ανάμεσα στα 10 άτομα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ψηλό I.Q.»

(μονάδες 7)

(β) Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος ατόμων που πρέπει να επιλέξουμε τυχαία από τον πληθυσμό αυτό, ώστε η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο με ψηλό I.Q. να είναι μεγαλύτερη του 90%. **(μονάδες 3)**

B5. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα πιο κάτω:

i. Είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{0\}$

ii. $f(-2) = -4\sqrt{e}, \quad f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}, \quad f(1) = -\frac{1}{e}, \quad f(2) = 0$

iii. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

iv. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

v. $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$

vi. $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$

Δίνεται επίσης ο πίνακας προσήμων των συναρτήσεων $f,\ f'$ και f''

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{2}{5}$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$-$	$\Vert$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

1. Στατιστική

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2}{\nu}} \text{ ή } s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i x_i^2}{\nu} - \bar{x}^2},$$

$$\text{όπου } \nu = \sum_{i=1}^{\kappa} f_i$$

$$r = \frac{\Sigma_{xy} - \nu\bar{x}\bar{y}}{\nu S_x S_y}, \text{ όπου } \Sigma_{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_\nu y_\nu$$

2. Τριγωνομετρία

$$ημ(A \pm B) = ημAσυνB \pm συνAημB$$

$$συν(A \pm B) = συνAσυνB \mp ημAημB$$

$$2ημα \cdot συνβ = ημ(α - β) + ημ(α + β)$$

$$2συνα \cdot συνβ = συν(α - β) + συν(α + β)$$

$$2\,ημα \cdot ημβ = συν(α - β) - συν(α + β)$$

$$ημ2α = 2ημα \cdot συνα \qquad συν2α = συν^2α - ημ^2α$$

$$ημ^2α = \frac{1 - συν2α}{2} \qquad συν^2α = \frac{1 + συν2α}{2}$$

$$ημ2α = \frac{2t}{1 + t^2} \qquad συν2α = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad t = εφα$$

$$ημA + ημB = 2ημ\frac{A + B}{2}\,συν\frac{A - B}{2}$$

$$ημA - ημB = 2\,ημ\frac{A - B}{2}συν\frac{A + B}{2}$$

$$συνA + συνB = 2\,συν\frac{A + B}{2}συν\frac{A - B}{2}$$

$$συνA - συνB = 2\,ημ\frac{B - A}{2}ημ\frac{A + B}{2}$$

Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

	Σε μοίρες	**Σε ακτίνια**
$ημx = ημα$	$x = 360^o κ + α$ ή $x = 360^o κ + 180^o - α, \quad κ \in \mathbb{Z}$	$x = 2πκ + α$ ή $x = 2πκ + π - α, \quad κ \in \mathbb{Z}$
$συνx = συνα$	$x = 360^o κ \pm α, \quad κ \in \mathbb{Z}$	$x = 2πκ \pm α, \quad κ \in \mathbb{Z}$
$εφx = εφα$	$x = 180^o\, κ + α, \quad κ \in \mathbb{Z}$	$x = πκ + α, \quad κ \in \mathbb{Z}$

3. Γεωμετρία

Ορθό πρίσμα	$E\pi = \Pi_\beta . \upsilon$	$V = E_\beta . \upsilon$
Κανονική Πυραμίδα	$E_\pi = \frac{1}{2}\Pi_\beta \cdot h$	$V = \frac{E_\beta . \upsilon}{3}$
Κύλινδρος	$E_\kappa = 2\pi R\upsilon$	$V = \pi R^2 \upsilon$
Κώνος	$E_\kappa = \pi R\lambda$	$V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_\kappa = \pi(R+\rho)\lambda$	$V = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)$
Σφαίρα	$E = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$

4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόσταση του σημείου $A(x_1, y_1)$ από την ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$: $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Έλλειψη

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \alpha > \beta$

Εστίες ($\pm$ γ,0), Διευθετούσες $x = \pm\frac{\alpha}{\varepsilon}$,

Εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$

5. Παράγωγοι

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$ $(\varepsilon\varphi x)' = \tau\varepsilon\mu^2 x$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

6. Ολοκληρώματα

$\int \tau\varepsilon\mu x \, dx = \ln|\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\varphi x| + c$ $\int \sigma\tau\varepsilon\mu x \, dx = \ln\left|\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right| + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \tau o\xi\eta\mu\frac{x}{\alpha} + c$ $\int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{x}{\alpha} + c$

7. Απλός Τόκος

$T = \frac{K.E.X}{100}$

Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία
Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003, Λευκωσία
Τηλέφωνο: 357 – 22378101, Φαξ: 357 – 22379122
cms@cms.org.cy, www.cms.org.cy

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024

Μαθηματικα Κατευθυνσης

Ημερομηνία: 17/06/2024

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α′: **Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο $K(1,1)$, αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο $\Sigma(1,6)$ προς τον κύκλο είναι ίσο με 4 μονάδες.

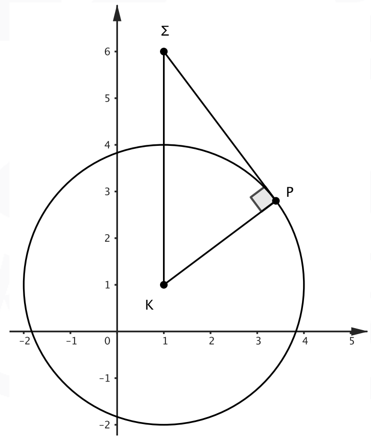
Λύση

Έστω R η ακτίνα του κύκλου και ΣP το εφαπτόμενο τμήμα (P το σημείο επαφής). Τότε

$$\Sigma P^2 + KP^2 = \Sigma K^2 \implies 4^2 + R^2 = 5^2 \implies R^2 = 9\,.$$

Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι η

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9\,.$$



2. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Λύση

Αναζητούμε $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\frac{1}{x(x-1)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{(x-1)^2} \iff 1 \equiv A(x-1)^2 + Bx(x-1) + \Gamma x \qquad (1)$$

Από την (1) μετά από πράξεις παίρνουμε

$$(A+B)x^2 + (\Gamma - B - 2A)x + (A-1) \equiv 0$$

απ' όπου προκύπτει:

$$\left\{ \begin{array}{c} A+B=0 \\ \Gamma - B - 2A = 0 \\ A-1=0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} B=-A \\ \Gamma = B+2A \\ A=1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} B=-1 \\ \Gamma = 1 \\ A=1 \end{array} \right\}.$$

Άρα

$$\frac{1}{x(x-1)^2} \equiv \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\,.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \\ &= \ln\left| \frac{x}{x-1} \right| - \frac{1}{x-1} + c \end{aligned}$$

Εναλλακτικά: Για τον προσδιορισμό των A, B, Γ μπορούμε από την (1) να δώσουμε στο x τρεις «βολικές» τιμές. Π.χ. για $x=0$ παίρνουμε $A=1$, για $x=1$ παίρνουμε $\Gamma=1$ και μετά για $x=2$ παίρνουμε $1 = A + 2B + 2\Gamma$ που δίνει $B=-1$.

3. Να χαρακτηρίσετε τον πιο κάτω ισχυρισμό ως **ΟΡΘΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

«Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα $\Delta \subset \mathbb{R}$, τότε ισχύει ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ»

Λύση

Ο ισχυρισμός είναι **ΛΑΘΟΣ**. Παράδειγμα, η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) = 3x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Στο εσωτερικό σημείο $x=0$ του διαστήματος έχουμε $f'(0) = 0$.

Σημείωση. Στο συμπέρασμα το ορθό είναι:

$$f'(x) \geqslant 0 \text{ σε κάθε εσωτερικό σημείο του } \Delta\,.$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει ότι το σημείο $A(0,1)$ ανήκει στη γραφική της παράσταση. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, αν η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης έχει κλίση:

$$\lambda(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Λύση

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} f'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)} &\implies f(x)f'(x)=e^{2x} \\ &\implies \int f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x=\int e^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &\implies \int f(x)\,\mathrm{d}f(x)=\int e^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &\implies \frac{f^2(x)}{2}=\frac{e^{2x}}{2}+c \\ &\implies f^2(x)=e^{2x}+2c \end{aligned}$$

Αφού $f(0)=1$, τότε $1=e^0+2c \implies c=0$. Επομένως $f^2(x)=e^{2x}$ και αφού το σύνολο τιμών της f είναι το $(0,+\infty)$, τότε $f(x)=e^x \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

5. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \text{τοξημ}\, t\,\mathrm{d}t}{\text{συν}\, x-1}$$

Λύση

Ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x \text{τοξημ}\, t\,\mathrm{d}t=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}(\text{συν}\, x-1)=0\,.$$

Άρα έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος De l'Hospital. Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \text{τοξημ}\, t\,\mathrm{d}t\right)'}{(\text{συν}\, x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{τοξημ}\, x}{-\text{ημ}\, x}\,.$$

Όμως

$$\lim_{x\to 0}\text{τοξημ}\, x=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}(-\text{ημ}\, x)=0\,.$$

Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο γιατί έχουμε πάλι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος De l'Hospital. Είναι

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(\text{τοξημ}\, x)'}{(-\text{ημ}\, x)'}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\text{συν}\, x}\right)=\frac{1}{-1}=-1\,.$$

Επομένως από δύο εφαρμογές του θεωρήματος De l'Hospital ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \text{τοξημ}\, t\,\mathrm{d}t}{\text{συν}\, x-1}=-1\,.$$

6. Θεωρούμε το χωρίο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από τη γραφική παράσταση της παραβολής

$$f(x)=(x+2)^2\,,$$

την ευθεία $y=9$ και τον άξονα των τεταγμένων. Να υπολογίσετε:

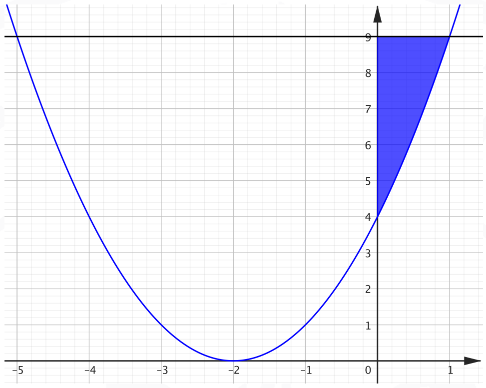
(α) το εμβαδόν του πιο πάνω χωρίου. **(μονάδες 2)** (β) τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του πιο πάνω χωρίου γύρω από τον άξονα των τεταγμένων. **(μονάδες 3)**

Λύση

(α) Η γραφική παράσταση της g είναι παραβολή με κορυφή το $(-2,0)$ και σημείο τομής με τον άξονα των y το $(0,4)$. Έχουμε

$$f(x) = 9 \iff (x+2)^2 = 9 \iff x+2 = \pm 3 \iff x = -5 \quad \text{ή} \quad x = 1\,.$$

Άρα η παραβολή τέμνει την ευθεία $y = 9$ στα σημεία $(-5,9)$ και $(1,9)$.



Το εμβαδόν που ζητείται είναι το σκιασμένο και ισούται με:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (9-(x+2)^2)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (9-x^2-4x-4)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (5-x^2-4x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[5x - \frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_0^1 \\ &= 5 - \frac{1}{3} - 2 = \frac{8}{3}\ \text{τ.μ.}\end{aligned}$$

(β) Επειδή $x+2>0$, ισχύει ότι

$$y = (x+2)^2 \implies x+2 = \sqrt{y} \implies x = \sqrt{y} - 2 \implies x^2 = y - 4\sqrt{y} + 4$$

Επομένως

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_4^9 x^2\,\mathrm{d}y = \pi \int_4^9 (y - 4\sqrt{y} + 4)\,\mathrm{d}y = \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{8}{3}y^{3/2} + 4y\right]_4^9 \\ &= \pi\left(\frac{9^2}{2} - \frac{8}{3}\cdot(\sqrt{9})^3 + 4\cdot 9 - \frac{4^2}{2} + \frac{8}{3}\cdot(\sqrt{4})^3 - 4\cdot 4\right) = \frac{11\pi}{6}\ \text{κ.μ.}\end{aligned}$$

7. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει:

$$f''(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$\int f(x)\,\eta\mu\, x\,\mathrm{d}x = \frac{f'(x)\,\eta\mu\, x - f(x)\,\sigma\upsilon\nu\, x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(μονάδες 3)

(β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^{-x}\,\eta\mu\, x\,\mathrm{d}x$$

(μονάδες 2)

Λύση

(α) Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες έχουμε

$$\begin{aligned}
I &= \int f(x)\,\eta\mu\, x\,\mathrm{d}x \\
&= f(x)\cdot(-\sigma\upsilon\nu\, x) - \int (-\sigma\upsilon\nu\, x) f'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -f(x)\,\sigma\upsilon\nu\, x + f'(x)\,\eta\mu\, x - \int \eta\mu(x) f''(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -f(x)\,\sigma\upsilon\nu\, x + f'(x)\,\eta\mu\, x - \int \eta\mu(x) f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\text{αφού } f''(x) = f(x)) \\
&= -f(x)\,\sigma\upsilon\nu\, x + f'(x)\,\eta\mu\, x - I + \kappa \quad \kappa \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Άρα

$$I = \frac{f'(x)\,\eta\mu\, x - f(x)\,\sigma\upsilon\nu\, x}{2} + c, \quad c = \tfrac{\kappa}{2} \in \mathbb{R}\,.$$

(β) Θέτουμε $f(x) = e^{-x}$. Τότε $f'(x) = -e^{-x}$ και $f''(x) = e^{-x} = f(x)$. Από το (α) έχουμε

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{-x}\,\eta\mu\, x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{f'(x)\,\eta\mu\, x - f(x)\,\sigma\upsilon\nu\, x}{2} + c \\
&= \frac{-e^{-x}\,\eta\mu\, x - e^{-x}\,\sigma\upsilon\nu\, x}{2} + c \\
&= -\frac{e^{-x}}{2}\,(\eta\mu\, x + \sigma\upsilon\nu\, x) + c\,.
\end{aligned}$$

8. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$$

Λύση

Χωρίζουμε το διάστημα $[0,1]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{1-0}{\nu} = \frac{1}{\nu}$. Έχουμε δηλαδή τα υποδιαστήματα:

$$\left[0, \frac{1}{\nu}\right], \left[\frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}\right], \ldots, \left[\frac{\nu-1}{\nu}, 1\right]$$

Επιλέγουμε ως ξ_κ ($\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$) το αριστερό άκρο του κάθε υποδιαστήματος, δηλαδή

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = \frac{1}{\nu}, \ldots, \xi_\nu = \frac{\nu-1}{\nu}.$$

Έχουμε

$$f(\xi_\kappa) = \left(\frac{\kappa-1}{\nu}\right)^2 = \frac{(\kappa-1)^2}{\nu^2} \quad \kappa = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Έτσι:

$$\begin{aligned}
\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{(\kappa-1)^2}{\nu^2} \cdot \frac{1}{\nu} \\
&= \frac{1}{\nu^3} \sum_{\kappa=1}^{\nu} (\kappa-1)^2 \\
&= \frac{1}{\nu^3} \left(0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (\nu-1)^2\right) \\
&= \frac{\nu(\nu-1)(2\nu-1)}{6\nu^3} \\
&= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\left(2 - \frac{1}{\nu}\right).
\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\left(2 - \frac{1}{\nu}\right) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}.$$

9. Δίνεται συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β).

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = f(x) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

(μονάδες 3)

(β) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

(μονάδες 2)

Λύση

(α) Η συνάρτηση $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως άθροισμα και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) ως άθροισμα και γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο (α, β). Έχουμε

$$g(\alpha) = f(\alpha) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot (\alpha - \alpha) = 0$$

και

$$g(\beta) = f(\beta) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot (\beta - \alpha)$$
$$= (f(\beta) - f(\alpha)) - (f(\beta) - f(\alpha)) = 0\,.$$

Άρα, $g(\alpha) = g(\beta)$ και κατά συνέπεια η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

(β) Έχουμε

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Αφού από το ερώτημα (α) η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$g'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}\,.$$

Εναλλακτικά: Η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Ικανοποιεί δηλαδή τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}\,.$$

10. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = ημ\, x,\ x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \quad \text{και} \quad g(x) = x - ημ\, x,\ x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τα ακρότατα. **(μονάδες 1,5)**

(β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα. **(μονάδες 1)**

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(0, f(0))$ και $\left(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2})\right)$. **(μονάδες 1)**

(δ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:

$$\frac{2x}{\pi} \leqslant ημ\, x \leqslant x, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

(μονάδες 1,5)

Λύση

(α) Για τη συνάρτηση g έχουμε $g'(x) = 1 - συν\, x$. Τότε $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Άρα, επειδή η g είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(0) = 0$ στο $x = 0$ και ολικό μέγιστο το $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$ στο $x = \frac{\pi}{2}$.

(β) Για τη συνάρτηση f έχουμε

$$f'(x) = συν\, x \quad \text{και } f''(x) = -ημ\, x$$

για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Τότε $f''(x) \leqslant 0$ για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ και κατά συνέπεια η f είναι κοίλη στο $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(γ) Είναι $f(0) = 0$ και $f(\frac{\pi}{2}) = 1$. Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$ και $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Η κλίση της ευθείας είναι

$$\lambda = \frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{2}{\pi}$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι η

$$y = \frac{2}{\pi}x\,.$$

(δ) Αφού f κοίλη στο $[0, \frac{\pi}{2}]$, ισχύει ότι

$$\text{ημ}\,x = f(x) \geqslant y_{\text{ευθείας}} = \frac{2x}{\pi} \qquad (1)$$

για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Επίσης, από τον ορισμό του ολικού ελάχιστου για τη συνάρτηση g, ισχύει ότι $g(x) \geqslant g(0) = 0$. Άρα,

$$x - \text{ημ}\,x \geqslant 0 \implies x \geqslant \text{ημ}\,x \qquad (2)$$

για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Από τις (1) και (2) καταλήγουμε ότι

$$\frac{2x}{\pi} \leqslant \text{ημ}\,x \leqslant x, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

ΜΕΡΟΣ Β$'$: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=\alpha^2$ και P τυχαίο σημείο του. Από το σημείο P φέρουμε ευθεία παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων, η οποία τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο N. Έστω Σ σημείο πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα PN τέτοιο ώστε:

$$\frac{\Sigma N}{PN}=\frac{\beta}{\alpha} \text{ όπου } 0<\beta<\alpha, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Σ καθώς το P κινείται πάνω στον κύκλο είναι η

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

(μονάδες 5)

(β) Δίνεται το σύστημα των ανισώσεων:

$$\begin{cases} x^2+y^2\leqslant \alpha^2 \\ \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}\geqslant 1, \quad 0<\beta<\alpha, \end{cases}$$

Το χωρίο που περιγράφεται από το πιο πάνω σύστημα περιστρέφεται κατά π ακτίνια γύρω από τον άξονα των τετμημένων. Να αποδείξετε ότι ο όγκος του παραγόμενου στερεού είναι ίσος με

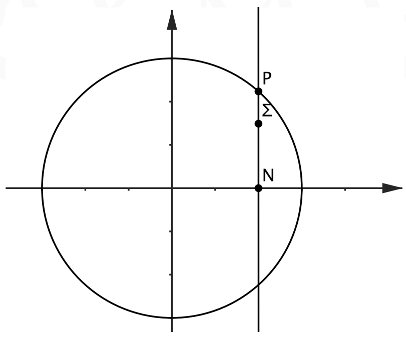
$$V=\frac{4}{3}\pi\alpha(\alpha^2-\beta^2) \text{ κ.μ.}$$

(μονάδες 5)

Λύση

(α) Χρησιμοποιώντας τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου τα σημεία P,Σ,N έχουν συντεταγμένες:

$$P(\alpha\,\text{συν}\,\vartheta,\alpha\,\text{ημ}\,\vartheta), \quad \Sigma(\alpha\,\text{συν}\,\vartheta,y) \quad \text{και} \quad N(\alpha\,\text{συν}\,\vartheta,0).$$



Αφού

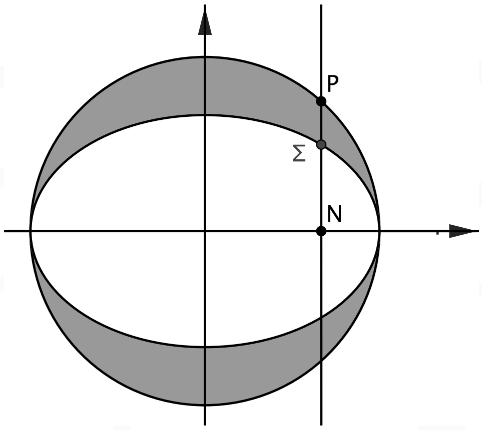
$$\frac{\Sigma N}{PN}=\frac{\beta}{\alpha} \implies \Sigma N=\frac{\beta}{\alpha}\cdot PN=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\alpha|\,\text{ημ}\,\vartheta|=\beta|\,\text{ημ}\,\vartheta|\,.$$

Άρα οι συντεταγμένες του σημείου Σ είναι $x = \alpha\,\text{συν}\,\vartheta$ και $y = \beta\,\text{ημ}\,\vartheta$. Από την τριγωνομετρική ταυτότητα $\text{ημ}^2\,\vartheta + \text{συν}^2\,\vartheta = 1$ έχουμε:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

που είναι η ζητούμενη εξίσωση της καμπύλης.

(β) Στο πιο κάτω σχήμα παρουσιάζεται το χωρίο που περιγράφεται από το παρακάτω σύστημα ανισώσεων.



Αν $y_2^2 = \alpha^2 - x^2$ και $y_1^2 = \beta^2 - \frac{\beta^2 x^2}{\alpha^2}$ τότε ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του χωρίου είναι:

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^\alpha (y_2^2 - y_1^2)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_0^\alpha \left(\alpha^2 - x^2 - \beta^2 + \frac{\beta^2 x^2}{\alpha^2}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \left[\alpha^2 x - \frac{x^3}{3} - \beta^2 x + \frac{\beta^2 x^3}{3\alpha^2}\right]_0^\alpha \\
&= 2\pi \left(\alpha^3 - \frac{\alpha^3}{3} - \beta^2\alpha + \frac{\beta^2\alpha}{3}\right) \\
&= \frac{4\pi\alpha(\alpha^2 - \beta^2)}{3} \text{ κ.μ.}
\end{aligned}$$

2. Σε ένα Λύκειο επτά (7) τελειόφοιτοι μαθητές/τριες ενοικίασαν τέσσερα (4) διθέσια μηχανάκια.

(α) Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν στα μηχανάκια οι τελειόφοιτοι, αν:

i. σε κάθε θέση οδηγού πρέπει απαραίτητα να υπάρχει μαθητής/τρια

ii. η Αργυρώ και ο Δημήτρης ξέχασαν να φέρουν το δίπλωμα οδήγησής τους, άρα δεν μπορούν να καθίσουν σε θέση οδηγού.

(μονάδες 6)

(β) Δεδομένου ότι η Αργυρώ και ο Δημήτρης δεν μπορούν να καθίσουν σε θέση οδηγού, να βρείτε την πιθανότητα η Γεωργία και ο Μάριος να καθίσουν στο ίδιο μηχανάκι. **(μονάδες 4)**

Λύση

Θεωρούμε ότι τα μηχανάκια είναι διαφορετικά αφού έχουν διαφορετικούς αριθμούς κυκλοφορίας. Θεωρούμε επίσης σε όλα τα ερωτήματα ότι κάθε μηχανάκι πρέπει να έχει έναν οδηγό.

(α) i. Υπάρχουν 4 θέσεις συνοδηγού. Θα αποκλείσουμε μία που δεν θα καθίσει κανένας μαθητής. Οι 7 μαθητές μπορούν να καθίσουν στις υπόλοιπες 7 θέσεις με 7! τρόπους.

Τελική Απάντηση: $4 \cdot 7! = 20160$ τρόποι.

Εναλλακτικά: Οι οδηγοί επιλέγονται με $\Delta_4^7 = 840$ τρόπους. Μένουν τέσσερεις κενές θέσεις για τρία άτομα. Η επιλογή μπορεί να γίνει με $\Delta_3^4 = 24$ τρόπους.

Τελική Απάντηση: $24 \cdot 840 = 20160$ τρόποι.

ii. Έχουμε τώρα μόνο 5 διαθέσιμους οδηγούς και 4 θέσεις οδηγού οπότε μπορούμε να επιλέξουμε τους οδηγούς με

$$\Delta_4^5 = \frac{5!}{1!} = 5! = 120 \text{ τρόπους.}$$

Μένουν τώρα 4 κενές θέσεις για 3 άτομα. Η επιλογή μπορεί να γίνει με

$$\Delta_3^4 = \frac{4!}{1!} = 4! = 24 \text{ τρόπους.}$$

Τελική Απάντηση: $120 \cdot 24 = 2880$ τρόποι.

(β) Επίλέγουμε με $\binom{4}{1} = 4$ τρόπους το μηχανάκι στο οποίο θα καθίσουν η Γεωργία και ο Μάριος. Επιλέγουμε με 2 τρόπους ποιος από τους δύο θα είναι οδηγός σε αυτό το μηχανάκι. Μένουν τρεις θέσεις οδηγού και έχουμε τρία παιδιά που μπορούν να καθίσουν σε αυτές. Αυτό γίνεται με $3! = 6$ τρόπους. Μένουν τρεις θέσεις συνοδηγού για να καθίσουν η Αργυρώ και ο Δημήτρης. Η Αργυρώ έχει 3 επιλογές και αφού καθίσει η Αργυρώ ο Δημήτρης έχει 2 επιλογές. Συνολικά υπάρχουν

$$4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = 288$$

τρόποι για να καθίσουν τα παιδιά σύμφωνα με τις συνθήκες της εκφώνησης.

Γράφουμε A για το ενδεχόμενο «Η Αργυρώ και ο Δημήτρης δεν οδηγούν» και B για το ενδεχόμενο «Η Γεωργία και ο Μάριος κάθονται στο ίδιο μηχανάκι».

Τελική Απάντηση: $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{288/\nu(\Omega)}{2880/\nu(\Omega)} = \dfrac{1}{10}.$

Εναλλακτικά: Επιλέγουμε με $\binom{4}{2} = 6$ τρόπους τα δύο μηχανάκια που θα καθίσουν στις θέσεις του συνοδηγού η Αργυρώ και ο Δημήτρης. Ακολούθως επιλέγουμε με 2 τρόπους σε ποιο μηχανάκι θα καθίσει η Αργυρώ και σε ποιο ο Δημήτρης.

Η Γεωργία και ο Μάριος δεν θα καθίσουν στη θέση του οδηγού σε αυτά τα δύο μηχανάκια. Έχουμε λοιπόν τρία άτομα για να επιλέξουμε τα δύο που θα καθίσουν στη θέση του οδηγού σε αυτά τα δύο μηχανάκια. Αυτό γίνεται με $3 \cdot 2 = 6$ τρόπους.

Από τα δύο μηχανάκια που έμειναν επιλέγουμε με $\binom{2}{1} = 2$ τρόπους το μηχανάκι που θα καθίσουν η Γεωργία και ο Μάριος και με 2 τρόπους ποιος από τους δύο θα καθίσει στη θέση του οδηγού.

Το τελευταίο άτομο είναι αναγκασμένο να καθίσει στη θέση του οδηγού στο τελευταίο μηχανάκι.

Συνολικά υπάρχουν

$$6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 288$$

τρόποι για να καθίσουν τα παιδιά σύμφωνα με τις συνθήκες της εκφώνησης.

Αν **δεν** θεωρήσουμε ότι τα μηχανάκια είναι διαφορετικά τότε έχουμε τις εξής λύσεις:

(α) i. Οι οδηγοί επιλέγονται με $\binom{7}{4} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$ τρόπους. Μένουν τέσσερεις κενές θέσεις για τρία άτομα. Η επιλογή μπορεί να γίνει με $\Delta_3^4 = 24$ τρόπους.

Τελική Απάντηση: $35 \cdot 24 = 840$ τρόποι.

ii. Επιλέγουμε με 5 τρόπους ποιος θα καθίσει οδηγός με την Αργυρώ και έπειτα με 4 τρόπους ποιος θα καθίσει οδηγός με τον Δημήτρη. Από τα άλλα τρία άτομα ο ένας θα καθίσει μόνος του. Αυτό γίνεται με 3 τρόπους. Τέλος από τους άλλους δύο, υπάρχουν 2 τρόποι να επιλέξουμε ποιος θα καθίσει στη θέση του οδηγού και ποιος στη θέση του συνοδηγού.

Τελική Απάντηση: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ τρόποι.

(β) Στις ευνοϊκές περιπτώσεις έχουμε αρχικά 2 τρόπους να επιλέξουμε ποιος από τους Γεωργία και Μάριο θα είναι ο οδηγός. Έπειτα ο Δημήτρης και η Αργυρώ κάθονται σε διαφορετικά μηχανάκια. Από τα υπόλοιπα τρία άτομα έχουμε 3 τρόπους να επιλέξουμε ποιος θα καθίσει με τον Δημήτρη και έπειτα 2 τρόπους για το ποιος θα καθίσει με την Αργυρώ. Μένει ένα άτομο που πρέπει να καθίσει μόνο του στη θέση του οδηγού στο τελευταίο μηχανάκι.

Τελική Απάντηση: $\dfrac{2 \cdot 3 \cdot 2}{120} = \dfrac{1}{10}$.

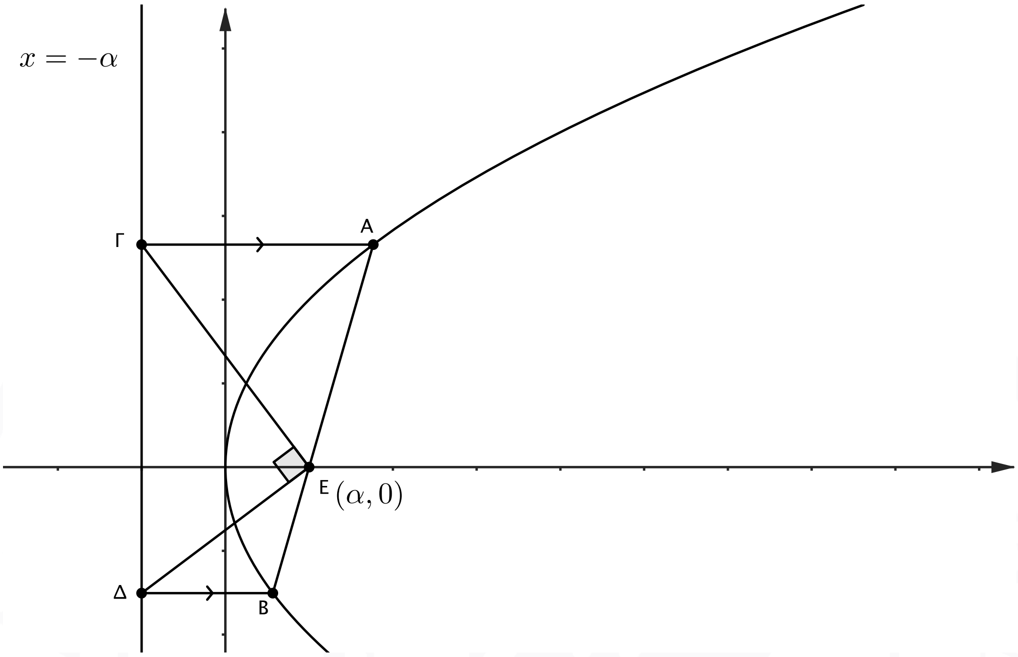
3. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4\alpha x$, $\alpha > 0$. Παίρνουμε σημεία Γ και Δ πάνω στη διευθετούσα της, με $y_\Gamma > 0$, έτσι ώστε η γωνία $\Gamma E \Delta$ να είναι ορθή, όπου E η εστία της παραβολής. Από τα Γ και Δ φέρουμε ευθείες παράλληλές προς τον άξονα της παραβολής, οι οποίες τέμνουν την παραβολή στα σημεία $A(\alpha t^2, 2\alpha t)$ και $B(\alpha\rho^2, 2\alpha\rho)$ αντίστοιχα.

(α) Να αποδείξετε ότι η AB είναι εστιακή χορδή. **(μονάδες 4)** (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A έτσι ώστε το τραπέζιο $AB\varDelta\varGamma$ να έχει ελάχιστο εμβαδόν. (Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι $E = \frac{(\beta_1+\beta_2)\upsilon}{2}$)

(μονάδες 6)

Λύση

(α) Αφού $A(\alpha t^2, 2\alpha t), B(\alpha\rho^2, 2\alpha\rho)$ και $A\varGamma \parallel B\varDelta \parallel xx'$ τότε $\varGamma(-\alpha, 2\alpha t)$ και $\varDelta(-\alpha, 2\alpha\rho)$.



Η εστία της παραβολής έχει συντεταγμένες $E(\alpha, 0)$. Άρα

$$\lambda_{\varGamma E} = \frac{2\alpha t - 0}{-\alpha - \alpha} = -t \quad \text{και} \quad \lambda_{\varDelta E} = -\rho\,.$$

Επειδή $\varGamma E \perp E\varDelta$ θα ισχύει

$$\lambda_{\varGamma E}\lambda_{\varDelta E} = -1 \iff t\rho = -1\,.$$

Υπολογίζουμε τις κλίσεις των και :

$$\lambda_{AE} = \frac{2\alpha t - 0}{\alpha t^2 - \alpha} = \frac{2\alpha t - 0}{\alpha(t^2-1)} = \frac{2t}{t^2-1}$$

$$\lambda_{EB} = \frac{2\rho}{\rho^2 - 1} = \frac{2\left(-\frac{1}{t}\right)}{\left(-\frac{1}{t}\right)^2 - 1} = \frac{-\frac{2}{t}}{\frac{1}{t^2} - 1} = \frac{-\frac{2}{t}}{\frac{1-t^2}{t^2}} = -\frac{2t}{1-t^2} = \frac{2t}{t^2-1}\,.$$

Αφού $\lambda_{AE} = \lambda_{EB}$ συνεπάγεται ότι τα σημεία A, E και B είναι συνευθειακά και επομένως η χορδή AB είναι εστιακή.

(β) Υπολογίζουμε

$$(A\varGamma) = \alpha + \alpha t^2 = \alpha(1+t^2)$$
$$(B\varDelta) = \alpha + \alpha\rho^2 = \alpha(1+\rho^2)$$
$$(\varGamma\varDelta) = |2\alpha t| + |2\alpha\rho| = 2\alpha t - 2\alpha\rho = 2\alpha(t-\rho)$$

Το εμβαδόν του τραπεζίου ισούται με:

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{[(A\Gamma) + (B\Delta)]\,(\Gamma\Delta)}{2} \\
&= \frac{\left[\alpha(1+t^2) + \alpha(1+\rho^2)\right] 2\alpha(t-\rho)}{2} \\
&= \alpha^2(2+t^2+\rho^2)(t-\rho) \\
&= \alpha^2\left(2+t^2+\frac{1}{t^2}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right) \\
&= \alpha^2\left(2t+\frac{2}{t}+t^3+t+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^3}\right) \\
&= \alpha^2\left(3t+\frac{3}{t}+t^3+\frac{1}{t^3}\right).
\end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \alpha^2\left(3-\frac{3}{t^2}+3t^2-\frac{3}{t^4}\right) \\
&= \frac{3\alpha^2(t^4-t^2+t^6-1)}{t^4} \\
&= \frac{3\alpha^2[t^4(1+t^2)-(1+t^2)]}{t^4} \\
&= \frac{3\alpha^2(1+t^2)(t^4-1)}{t^4}.
\end{aligned}$$

Έχουμε

$$E'(t) = 0 \iff t^4-1=0 \iff t^4=1 \iff t=1\,(t>0).$$

Επίσης

$$E''(t) = \alpha^2\left(\frac{6}{t^3}+6t+\frac{12}{t^5}\right).$$

Άρα $E''(1) = 24\alpha^2 > 0$ και το εμβαδόν του τραπεζίου γίνεται ελάχιστο όταν $t = 1$. Οι συντεταγμένες του A σε αυτήν την περίπτωση είναι $A(\alpha, 2\alpha)$.

Εναλλακτικά: Έχουμε

$$E(t) = \alpha^2\left(3t+\frac{3}{t}+t^3+\frac{1}{t^3}\right) = \alpha^2\left(t+\frac{1}{t}\right)^3.$$

Όμως (για $t > 0$) ισχύει ότι $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$ με ισότητα αν και μόνο αν $t = 1$. Πράγματι

$$t+\frac{1}{t} \geqslant 2 \iff t^2-2t+1 \geqslant 0 \iff (t-1)^2 \geqslant 0\,.$$

Άρα $E_{min} = 8\alpha^2$ όταν $t = 1$ και τότε οι συντεταγμένες του A είναι $A(\alpha, 2\alpha)$

4. Το 15% του ανθρώπινου πληθυσμού έχει ψηλό δείκτη νοημοσύνης (I.Q.).

(α) Επιλέγουμε στην τύχη 10 άτομα από αυτόν τον πληθυσμό. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των πιο κάτω ενδεχομένων:

A: «Ανάμεσα στο 10 άτομα υπάρχουν ακριβώς 4 με ψηλό I.Q.»

B: «Ανάμεσα στο 10 άτομα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ψηλό I.Q.»

(μονάδες 7)

(β) Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος ατόμων που πρέπει να επιλέξουμε τυχαία από τον πληθυσμό αυτό, ώστε η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο με ψηλό I.Q. να είναι μεγαλύτερη του 90%. **(μονάδες 3)**

Λύση

(α) Η πιθανότητα ένα άτομο να έχει ψηλό I.Q. είναι $P(IQ) = \frac{15}{100}$ και η πιθανότητα να μην έχει ψηλό I.Q. είναι $P(IQ') = \frac{85}{100}$.

Υπάρχουν ακριβώς

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{6!4!} = 210$$

τρόποι να επιλέξουμε τα 4 άτομα με υψηλό I.Q. ανάμεσα στο 10. Άρα

$$P(A) = \binom{10}{4}\left(\frac{15}{100}\right)^4\left(\frac{85}{100}\right)^6 \approx 0{,}04.$$

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα ανάμεσα στα 10 άτομα να υπάρχουν τουλάχιστον 2 με υψηλό I.Q., μπορούμε πρώτα να υπολογίσουμε την πιθανότητα να υπάρχουν 0 ή 1 άτομα με υψηλό I.Q. και στη συνέχεια να αφαιρέσουμε αυτή την πιθανότητα από τη μονάδα. Έτσι,

$$P(B) = 1 - \left[\binom{10}{0}\left(\frac{15}{100}\right)^0\left(\frac{15}{100}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{15}{100}\right)^1\left(\frac{85}{100}\right)^9\right] \approx 0{,}46.$$

(β) Η πιθανότητα ένα άτομο να **μην** έχει υψηλό I.Q. είναι $P(IQ') = \frac{85}{100}$. Άρα αν επιλέξουμε n άτομα, η πιθανότητα κανένα από αυτά τα άτομα να μην έχει υψηλό I.Q. είναι:

$$P(\text{κανένας με υψηλό I.Q.}) = \left(\frac{85}{100}\right)^n.$$

Η πιθανότητα ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο με υψηλό I.Q. είναι η συμπληρωματική αυτής της πιθανότητας, δηλαδή:

$$P(\text{τουλάχιστον ένας με υψηλό I.Q.}) = 1 - \left(\frac{85}{100}\right)^n.$$

Αφού θέλουμε αυτή η πιθανότητα να είναι μεγαλύτερη από 90% τότε:

$$1 - \left(\frac{85}{100}\right)^n > \frac{90}{100} \iff \left(\frac{85}{100}\right)^n < \frac{10}{100} \iff \ln(0{,}85)^n < \ln(0{,}1)$$
$$\iff n\ln(0{,}85) < \ln(0{,}1) \overset{\ln(0{,}85)<0}{\iff} n > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}85)} \approx 14{,}17.$$

Επομένως, το ελάχιστο πλήθος ατόμων που πρέπει να επιλέξουμε είναι ο μικρότερος ακέραιος μεγαλύτερος από το 14,17, δηλαδή 15.

Άρα πρέπει να επιλέξουμε τουλάχιστον 15 άτομα.

5. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα πιο κάτω:

i. Είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$

ii. $f(-2)=-4\sqrt{e}$, $\quad f\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}$, $\quad f(1)=-\frac{1}{e}$, $\quad f(2)=0$

iii. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

iv. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

v. $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x)-(x-3)]=0$

vi. $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x)-(x-3)]=0$

Δίνεται επίσης ο πίνακας προσήμων των συναρτήσεων f, f' και f''.

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{2}{5}$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$-$	‖	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$		$+$		$+$	

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{0\}$ και η f είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Στη συνέχεια, βρίσκουμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων.

- Η συνάρτηση f δεν ορίζεται στο $x=0$.
- Αν $y=f(x)=0$, τότε $x=2$, αφού $f(2)=0$.

Επομένως, το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων είναι το $(2,0)$.

Από τον πίνακα προσήμων, έχουμε ότι:

- $f(x)<0, \forall x\in(-\infty,0)\cup(0,2)$
- $f(2)=0$
- $f(x)>0, \forall x\in(2,+\infty)$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f'.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	‖	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα, έχουμε:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[1,+\infty)$, ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-2,0)$ και $(0,1]$.

- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -2$, το $f(-2) = -4\sqrt{e}$ και τοπικό ελάχιστο για $x = 1$, το $f(1) = -\frac{1}{e}$.

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f''.

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$			‖		ΣΚ		

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα, έχουμε:

- Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $\left(0, \frac{2}{5}\right]$, ενώ η f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$.
- Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = \frac{2}{5}$, το $\left(\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}\right)$.

Έχουμε ότι $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$. Επομένως, η ευθεία με εξίσωση $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f (από τα «αριστερά»). Επιπλέον, αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε δεν υπάρχουν άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες για τη γραφική της παράσταση.

Ακολούθως, έχουμε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$. Επομένως, η ευθεία με εξίσωση $y = x - 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f και στην περιοχή του $+\infty$ και στην περιοχή του $-\infty$. Αυτό αποκλείει και την ύπαρξη οριζόντιας ασύμπτωτης σε κάποια από τις δύο περιοχές.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται πιο κάτω: